

Matematyka - zajęcia wyrównawcze

Zajęcia nr 5 – Wielomiany, funkcja wymierna

dr Krzysztof Molenda

29 października 2012

1 Cele i zakres zajęć

Efekty kształcenia : student stosuje logiczny zapis przebiegu rozumowania, potrafi planować rozwiązanie; zauważa prawidłowości, uogólnia je i uzasadnia, posługuje się poprawną notacją matematyczną, sprawnie wykonuje działania matematyczne

Zakres tematyczny : wielomiany jednej zmiennej, działania na wielomianach, twierdzenie Bezouta, równania i nierówności algebraiczne, funkcje wymierne jednej zmiennej, równania i nierówności wymierne, funkcja homograficzna. Pierwiastek wielokrotny

2 Ćwiczenia

2.1 Wielomiany, działania na wielomianach

Zad. 1 Wykonaj działania na wielomianach:

(a) $(x - 3)(2x^2 + x + 5)$

(b) $(x^3 - x + 2)(3x^2 - x + 4)$

(c) $(x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x + 4) : (x - 3)$

(d) $(-4x^3 + 2x^2 - x - \frac{1}{2}) : (2x + 1)$

(e) $(x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15) : (x^2 + x + 1)$

(f) $(x^2 + x + 1)^3$

(g) $(2x - 1)^8$

(h) $(x^3 + 4x^2 + ax + b) : (x - 2)^2$, gdzie a, b są parametrami

Zad. 2 Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - 2x^2 - x - 3$. Oblicz:

(a) $W(0)$

(b) $W(1)$

- (c) $W(2)$
- (d) $W(\sqrt{2})$
- (e) $W(-\sqrt{2})$

Zad. 3 Oblicz resztę nie wykonując dzielenia:

- (a) $(4y^5 + 3y^3 - 2y + 1) : (y + 1)$
- (b) $(2x^3 - 4x^2 - 11x - 3) : (x - \sqrt{3})$

Zad. 4 Rozłóż wielomian na czynniki pierwsze (w liczbach rzeczywistych):

- (a) $(4x - 1)(x + 2) - (12x^2 - 3x) + (7 - x)(4x - 1)$
- (b) $2(2x + 3)^2 - 7(x + 1)^2$
- (c) $1 + x - x^3 - x^2$
- (d) $4x^4 - 3x^2 + 1$
- (e) $x^3 - a^2x - (x - a)^2(2x + 2a)$, gdzie a jest parametrem
- (f) $y^4 - y^3 - 7y^2 + y + 6$
- (g) $1 - x^{16}$
- (h) $x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8$

Zad. 5 Rozwiąż równania w liczbach rzeczywistych:

- (a) $1 - x^{16} = 0$
- (b) $3x^{10} + 4x^5 - 4 = 0$
- (c) $(x^2 + x)^4 - 1 = 0$
- (d) $x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = 0$
- (e) $x^4 - 5x^3 + x^2 + 11x + 4 = 0$
- (f) $36x^3 - x + 1 = 0$
- (g) $x^4 + 3 - |3x^3 + x| = 0$

Zad. 6 Rozwiąż nierówności w liczbach rzeczywistych:

- (a) $x(x^2 + 1)(x - 1)(x - x^2 - 1) > 0$
- (b) $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 < 0$
- (c) $-2(x + 2)^2(x + 1)x^3(x - 1)^4(x - 2) > 0$
- (d) $x^4 + 2x \geq 3x^2$

Zad. 7 Napisz wielomian najniższego stopnia o współczynnikach całkowitych, którego jedynymi pierwiastkami są liczby

- (a) $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}$
(b) $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{7}$
(c) $-\frac{15}{4}, \frac{5}{6}$
(d) $\frac{4}{5}, \frac{3}{10}, -2$

2.2 Funkcja wymierna

Zad. 8 Wyznacz tak liczby a, b, c , aby dana równość stała się tożsamością (rozkład na ułamki proste)

- (a) $\frac{3x-7}{x^2-5x+6} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-3}$
(b) $\frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$
(c) $\frac{3x+4}{x^3+4x} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+4}$
(d) $\frac{x+5}{x^2+4x+4} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2}$
(e) $\frac{x^3-x^2-x+5}{x^2-1} = x-1 + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x-1)}$

Zad. 9 Rozwiąż równania:

- (a) $\frac{1}{x^3-x^2+x-1} - \frac{4}{x+1} = \frac{x^2+10x}{x^4-1} - \frac{4x^2+21}{x^3+x^2+x+1}$
(b) $\frac{20+x}{2x-2} - \frac{9x^2+x+2}{6x^2-6} = \frac{5-3x}{x+1} - \frac{10-4x}{3x+3}$
(c) $\frac{5x^2+4x-1}{x^2-x} = \frac{x}{x-1}$

Zad. 10 Zbadaj w zależności od parametrów a, b rozwiązania równań:

- (a) $\frac{x}{x+a} - \frac{a}{x-a} = \frac{x^2-5a^2}{x^2-a^2}$
(b) $1 + \frac{b}{b+2x} = \frac{5b-2x}{b-2x}$
(c) $\frac{a+b-x}{b+x} = \frac{2(a-x)}{2x-a+2b}$

Zad. 11 Rozwiąż nierówności:

(a) $\frac{1+x^3}{x^2-4} < x$

(b) $\frac{x^2}{4+9x^4} \leq \frac{1}{12}$

(c) $\frac{\left(x^4 - \frac{1}{x}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)}{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right)} \geq 0$

2.3 Układy równań i nierówności algebraicznych

Zad. 12 Rozwiąż algebraicznie układy równań:

a) $\begin{cases} \frac{x^5+y^3}{x^3+y^5} = \frac{31}{7} \\ x^2+xy+y^2y = 3 \end{cases}$ Wskazówka: wprowadź pomocnicze zmienne $u = x+y$, $v = xy$

b) $\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 12 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \end{cases}$ Wskazówka: wprowadź pomocnicze zmienne $u = x+y$, $v = xy$

c) $\begin{cases} x:y:z = 1:(-3):4 \\ xy+zx = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4\sqrt{\frac{3x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{3x}} = 5 \\ 3xy - 2(x+y) = 0 \end{cases}$

Zad. 13 Rozwiąż układy nierówności

a) $\begin{cases} (x-2)(x^2-6x+9) \leq 0 \\ \frac{x^2+10x+25}{4x-5} \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{3x} < 1 \\ x + \frac{4}{x} \geq \frac{4}{3}x \\ 9x^2 - 9x + 1 < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{2x}{x^2-9} \leq \frac{1}{x+2} \\ \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} \leq \frac{2}{x+2} \end{cases}$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{ax}{a-2} - \frac{x-1}{3} < \frac{2x+3}{4} \\ \frac{(a-10)x}{2} + a > \frac{a(x+2)}{2} - 5x - 6 \end{cases} \quad \text{dla każdego } a \in \mathbb{R}$$

3 Zadania uzupełniające

Zad. 14 Rozwiąż równanie

$$2x^5 + 5x^4 + 11x^3 + 14x^2 + 11x + 5 = 0$$

w liczbach rzeczywistych:

Zad. 15 Rozwiąż równanie

$$|x^4 - 4| - |x^2 + 2| = |x^4 - x^2 - 6|$$

w liczbach rzeczywistych:

Zad. 16 Wielomian $Q(x) = x^5 + 3x^3 + px^2 + qx + 3$ daje przy dzieleniu przez wielomian $P(x) = x^2 + 2$ resztę $R(x) = x + 1$. Wyznacz współczynniki p i q .

Zad. 17 W trójkącie równoramiennym wysokość równa się 10 cm. Okrąg, którego średnicą jest podstawa trójkąta, przecina ramiona trójkąta w punktach M i N . $MN = 6$ cm. Oblicz przynajmniej jedną z możliwych długości podstawy trójkąta.