

# Matematyka - zajęcia wyrównawcze

## Zajęcia nr 2 – Przekształcanie wyrażeń algebraicznych

dr Krzysztof Molenda

7 października 2012

### 1 Cele i zakres zajęć

Efekty kształcenia : student stosuje logiczny zapis przebiegu rozumowania, potrafi planować rozwiązanie; zauważa prawidłowości, uogólnia je i uzasadnia, posługuje się poprawną notacją matematyczną, sprawnie wykonuje działania matematyczne

Zakres tematyczny : wyrażenia algebraiczne; przekształcanie wyrażeń wyrażalnych i niewyrażalnych; równania i nierówności pierwiastkowe; potęgowanie, pierwiastkowanie, wzory skróconego mnożenia

### 2 Ćwiczenia

**Zad. 1** Uprość wyrażenia:

(a)  $(x^{-1} + y^{-2})^2$

(b)  $\frac{x + \frac{1}{x} - 1}{x^2 + \frac{1}{x}}$

(c)  $(a^{-2} + b^{-3})(a^{-2} - b^{-3})$

(d)  $\frac{x^{-2}y^{-1} + x^{-1}y^{-2}}{x^{-2} - y^{-2}} + x^3(x^2 - 2xy + y^2)$

(e)  $\left(\frac{3}{\sqrt{1+x}} + \sqrt{1-x}\right) : \left(\frac{3}{\sqrt{1-x}} + 1\right)$  dla  $|x| < 1$ . UWAGA: w tym zadaniu nie musisz usuwać nierówności, zastosuj sprytne podstawienia

**Zad. 2** (a) Zapisz symbolicznie wyrażenia opisane słownie:

- kwadrat sumy liczb  $a$ ,  $b$ ,
- różnica kwadratów liczb  $a$ ,  $b$ ,
- iloczyn liczby  $a$  i różnicy sześcianów liczb  $x$  oraz  $y$
- suma ilorazu pierwiastka kwadratowego liczby  $x$  przez liczbę  $y$  i odwrotności liczby  $z$ .

(b) Zapisz słownie wyrażenia podane w notacji symbolicznej:

- $x^3 - y^2$ ,
- $\frac{(x+y)^3}{\sqrt{x-y}}$
- $|x - y| + \frac{1}{z}$

**Zad. 3** Oblicz:

- (a)  $16^{\frac{1}{4}}$
- (b)  $2 \cdot 27^{\frac{2}{3}}$
- (c)  $5^{-1} \cdot 25^{\frac{3}{2}}$
- (d)  $\frac{(3\frac{1}{12} + 4,375) : 19\frac{8}{9}}{2\frac{5}{8} - 2\frac{5}{14}}$
- (e)  $20^2 - 19^2$
- (f)  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^4 - 4(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$
- (g)  $\left(\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}\right)^3 + 3\left(\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}\right)$
- (h)  $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{121}+\sqrt{120}}$

**Zad. 4** Oblicz wartość wyrażenia:

- (a) 
$$\frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4xy}$$
  
jeśli  $x = 1,7$ ,  $y = -0,7$ ,
- (b) 
$$\frac{1+a+a^2}{1+a-a^2} + \frac{b^2+b+1}{b^2-b+1}$$
  
jeśli  $a = \frac{1}{3}$ ,  $b = \frac{1}{3}$ .

**Zad. 5** Usuń niewymierność z mianownika ułamka:

- (a)  $\frac{1}{\sqrt{x}}$
- (b)  $\frac{2}{\sqrt{2}+1}$
- (c)  $\frac{10}{\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{2}}$
- (d)  $\frac{2}{\sqrt[3]{5}-1}$
- (e)  $\frac{3}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$

**Zad. 6** Sprowadź wyrażenia do postaci iloczynowej (rozłóż na czynniki):

- (a)  $x^5 - x^3 + x^2 - 1$

(b)  $x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)$

**Zad. 7** Rozwiąż równania

(a)  $\frac{3}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{1-x} = 1$

(b)  $\sqrt{x-1} + \sqrt{1-x} = 1$

(c)  $\sqrt{x^6 + x^2 - 1} = x^3$

(d)  $\sqrt{4x+2} + \sqrt{4x-2} = 4$

(e)  $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} + \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} = 34$

**Zad. 8** Rozwiąż nierówności

(a)  $\sqrt{x^2+1} \geq x+1$

(b)  $\sqrt{2+x-x^2} > x-4$

(c)  $\sqrt{x+2} \geq \sqrt{2x-8}$

(d)  $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$

(e)  $\sqrt{(x+4)(x-3)} < 6-x$ .

### 3 Zadania uzupełniające

**Zad. 9** Oblicz wartość wyrażenia:

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}}$$

**Zad. 10** Uprość wyrażenia:

(a)  $ab \sqrt[n]{a^{1-n}b^{-n} - a^{-n}b^{1-n}} \cdot \sqrt[n]{(a-b)^{-1}}$

(b)  $\frac{x \left( \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2y\sqrt{x}} \right)^{-1} + y \left( \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2x\sqrt{y}} \right)^{-1}}{\left( \frac{x+\sqrt{xy}}{2xy} \right)^{-1} + \left( \frac{y+\sqrt{xy}}{2xy} \right)^{-1}}$

**Zad. 11** Oblicz wartość wyrażenia:

$$\left( \sqrt[m]{x} + \sqrt[n]{x} \right)^2 - 4a^2 \cdot \sqrt[m \cdot n]{x^{m+n}}$$

dla

$$x = \left( a + \sqrt{a^2 - 1} \right)^{\frac{2mn}{m-n}}$$

przy założeniu, że  $a > 1; m \neq n, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ .

**Zad. 12** Udowodnić, że jeżeli liczby dodatnie  $a, b, c$  tworzą ciąg arytmetyczny, to liczby

$$\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

również tworzą ciąg arytmetyczny.