



# Matematyka - zajęcia wyrównawcze

## Zajęcia nr 3 – Funkcja i jej własności

dr Krzysztof Molenda

15 października 2012

### 1 Cele i zakres zajęć

Efekty kształcenia : student stosuje logiczny zapis przebiegu rozumowania, potrafi planować rozwiązanie; zauważa prawidłowości, uogólnia je i uzasadnia, posługuje się poprawną notacją matematyczną, sprawnie wykonuje działania matematyczne

Zakres tematyczny : wyznaczanie dziedziny funkcji, szkicowanie wykresu funkcji (transformacje wykresu bazowego), wyznaczanie funkcji odwrotnej do danej, parzystość i nieparzystość funkcji, monotoniczność funkcji i ekstrema lokalne, działania na funkcjach, składanie funkcji

### 2 Ćwiczenia

**Zad. 1** Wyznacz dziedzinę funkcji:

(a)  $f(x) = \frac{x^2+7}{3-x^2}$

(b)  $f(x) = \frac{-2}{(x+2)(1-x)}$

(c)  $f(x) = \frac{3(x+2)}{(x^2+1)(1-x)}$

(d)  $f(x) = \sqrt{x-1}$

(e)  $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x-3}}$

(f)  $f(x) = \frac{8x-1}{x\sqrt{x-4}}$

(g)  $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{1-x^2}$

(h)  $f(x) = \frac{1}{x+1} + \sqrt{x-3} - \frac{\sqrt{x^2}}{x}$

(i)  $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|-1}$

**Zad. 2** Narysuj wykres funkcji. Podaj dziedzinę, zbiór wartości; określ monotoniczność, miejsca zerowe:



- (a)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$
- (b)  $f(x) = 2(x+1)^2 - 2$
- (c)  $f(x) = \sqrt{x-1}$
- (d)  $f(x) = \sqrt{x} - 1$
- (e)  $f(x) = -\sqrt{2-x}$
- (f)  $f(x) = \sqrt{-2+|x|}$
- (g)  $f(x) = |\sqrt{x} - 2|$
- (h)  $f(x) = \frac{x-2}{1-x}$
- (i)  $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$
- (j)  $f(x) = |x - 2|$
- (k)  $f(x) = |||x| - 1| - 1|$
- (l)  $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; 2) \\ x & \text{dla } x \in (2; 3) \\ -1 & \text{dla } x \in (3; \infty) \end{cases}$
- (m)  $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \geq \frac{1}{2} \\ -2x + 1 & x < \frac{1}{2} \end{cases}$
- (n)  $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{dla } x < -1 \\ 2 & \text{dla } -1 \leq x < 1 \\ x + 1 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$

**Zad. 3** Zbadaj, czy punkty  $A = (0, 5), B = (0, 2), C = (2, 5), D = (-1, -4), E = (-2, 11)$  należą do wykresu funkcji  $f(x) = 3|x - 1| + 2$ .

**Zad. 4** Wyznacz funkcję odwrotną do danej (o ile istnieje), a następnie sporządź wykres funkcji danej i odwrotnej:

- (a)  $f(x) = 2x - 3$
- (b)  $f(x) = \frac{1}{x-2}$
- (c)  $f(x) = -x + \frac{1}{2}$
- (d)  $f(x) = 1 - xx - 2$
- (e)  $f(x) = x^2$

**Zad. 5** Zbadaj parzystość i nieparzystość funkcji:

- (a)  $f(x) = x^2 + 3$
- (b)  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x$

(c)  $f(x) = x^3$

(d)  $f(x) = |x|$

(e)  $f(x) = x \cdot |x|$

(f)  $f(x) = x + \frac{1}{x}$

(g)  $f(x) = |x|$

**Zad. 6** Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji:

(a)  $f(x) = x^2 + 3x + 1$

(b)  $f(x) = -x^2 + 1$

(c)  $f(x) = |1 - x| + 2$

(d)  $f(x) = |x|$

(e)  $f(x) = -\frac{1}{x}$

(f)  $f(x) = -|x| + |x - 2|$

(g)  $f(x) = |x|$

**Zad. 7** Dla danych funkcji  $f(x) = 2x + 1$  oraz  $g(x) = |x - 1|$  wyznacz wzory:

(a)  $f(g(x))$

(b)  $g(f(x))$

(c)  $g(x)f(x)$

(d)  $f(f(x))$

(e)  $f(x) + g(x^2)$

(f)  $(f(x))^2$

(g)  $g(g(x - 1) - 1)$

(h)  $\frac{f(\frac{1}{x})}{(g(x))^2}$

(i)  $f(\sqrt{g(x) - 1})$

(j)  $f(\sqrt{g(x)} - 1)$

**Zad. 8** Zaznacz na płaszczyźnie zbiór punktów spełniających warunek:

(a)  $|x| = |y|$

(b)  $|x| > |y|$

(c)  $|x| + |y| \leq 1$

(d)  $|x - y| > 4$

(e)  $x + y = 4$  oraz  $x - y = 2$

(f)  $x + y > 2$  i  $y = 2x$

**Zad. 9** Znajdź wzór funkcji liniowej, która(a) przechodzi przez początek układu współrzędnych i przez punkt  $A(3, 2)$ (b) przechodzi przez początek układu współrzędnych i przez punkt  $A(-2, 4)$ (c) tworzy z dodatnią półosią osi  $x$  kąt  $\alpha = \frac{\pi}{6}$  i przechodzi przez punkt  $A(\sqrt{3}, 2)$ (d) tworzy z dodatnią półosią osi  $x$  kąt  $\alpha = \frac{3}{4}\pi$  i przechodzi przez punkt  $A(-1, -2)$ **Zad. 10** Naszkicuj wykres funkcji  $y = 3x$ . Przekształć go przez symetrię względem(a) osi  $x$ (b) osi  $y$ (c) prostej  $y = 2$ 

(d) początku układu współrzędnych.

Napisz wzór funkcji, której wykresem jest otrzymana prosta.

### 3 Zadania uzupełniające

**Zad. 11** Dla jakich  $x$  ma sens wyrażenie

$$\sqrt[4]{x+1} + \sqrt{\frac{x^2 - 2x + 5}{1-x}}$$

**Zad. 12** Suma cyfr liczby trzycyfrowej wynosi 15. Pierwsza cyfra jest o 5 mniejsza od drugiej, która jest o 4 większa od trzeciej. Jaka to liczba?**Zad. 13** Rozwiąż układ równań?

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y-1} + \frac{5}{x-y+1} = 2 \\ \frac{3}{x+y-1} - \frac{2}{x-y+1} = 1 \end{cases}$$

**Zad. 14** Rozwiąż układ równań?

$$\begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1 \\ |x-1| - y = -5 \end{cases}$$