



Matematyka - zajęcia wyrównawcze

Zajęcia nr 3 – Funkcja i jej własności. Funkcja liniowa

dr Agnieszka Peszek

18 października 2012

1 Cele i zakres zajęć

Efekty kształcenia : sprawnie wykonuje podstawowe działania matematyczne, potrafi zapisać problem za pomocą notacji matematycznej; zauważa zastosowanie matematyki w życiu codziennym, potrafi planować rozwiązanie

Zakres tematyczny : własności funkcji (monotoniczność, parzystość, różnowartościowość); funkcja odwrotna. Funkcja liniowa. Równania i nierówności pierwszego stopnia, układy równań i nierówności pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

2 Ćwiczenia

Zad. 1 Wyznacz dziedzinę funkcji:

(a) $f(x) = \frac{x^2+7}{3-x^2}$

(b) $f(x) = \frac{-2}{(x+2)(1-x)}$

(c) $f(x) = \frac{3(x+2)}{(x^2+1)(1-x)}$

(d) $f(x) = \sqrt{x-1}$

(e) $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x-3}}$

(f) $f(x) = \frac{8x-1}{x\sqrt{x-4}}$

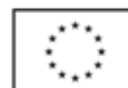
(g) $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{1-x^2}$

(h) $f(x) = \frac{1}{x+1} + \sqrt{x-3} - \frac{\sqrt{x^2}}{x}$

Zad. 2 Narysuj wykres funkcji. Podaj dziedzinę, zbiór wartości; określ monotoniczność, miejsca zerowe:

(a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$

(b) $f(x) = \sqrt{x-1}$



(c) $f(x) = \sqrt{2-x}$

(d) $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$

(e) $f(x) = |x-2|$

(f) $f(x) = ||x-1|-1|$

(g) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; 2) \\ x & \text{dla } x \in (2; 3) \\ -1 & \text{dla } x \in (3; \infty) \end{cases}$

(h) $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \geq \frac{1}{2} \\ -2x+1 & x < \frac{1}{2} \end{cases}$

(i) $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{dla } x < -1 \\ 2 & \text{dla } -1 \leq x < 1 \\ x+1 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$

Zad. 3 Zbadaj, czy punkty $A = (0, 5), B = (0, 2), C = (2, 5), D = (-1, -4), E = (-2, 11)$ należą do wykresu funkcji $f(x) = 3|x-1|+2$.

Zad. 4 Wyznacz funkcję odwrotną do danej a następnie sporządź wykres funkcji danej i odwrotnej:

(a) $f(x) = 2x-3$

(b) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

(c) $f(x) = -x + \frac{1}{2}$

Zad. 5 Zbadaj parzystość i nieparzystość funkcji:

(a) $f(x) = x^2 + 3$

(b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x$

(c) $f(x) = x^3$

(d) $f(x) = |x|$

(e) $f(x) = x \cdot |x|$

(f) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

(g) $f(x) = |x|$

Zad. 6 Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji:

(a) $f(x) = x^2 + 3x + 1$

(b) $f(x) = -x^2 + 1$

(c) $f(x) = |1-x|+2$

(d) $f(x) = |x|$

(e) $f(x) = -\frac{1}{x}$

(f) $f(x) = -|x| + |x - 2|$

(g) $f(x) = |x|$

Zad. 7 Zaznacz na płaszczyźnie zbiór punktów spełniających warunek:

(a) $|x| = |y|$

(b) $|x| + |y| \leq 1$

(c) $|x - y| > 4$

Zad. 8 Znajdź wzór funkcji liniowej, która

(a) przechodzi przez początek układu współrzędnych i przez punkt $A(3, 2)$ (b) przechodzi przez początek układu współrzędnych i przez punkt $A(-2, 4)$ (c) tworzy z dodatnią półosią osi x kąt $\alpha = \frac{\pi}{6}$ i przechodzi przez punkt $A(\sqrt{3}, 2)$ (d) tworzy z dodatnią półosią osi x kąt $\alpha = \frac{3}{4}\pi$ i przechodzi przez punkt $A(-2, -2)$.

Zad. 9 Naskicuj wykres funkcji $y = 3x$. Przekształć go przez symetrię względem

(a) osi x (b) osi y (c) prostej $y = 2$

(d) początku układu współrzędnych.

Napisz wzór funkcji, której wykresem jest otrzymana prosta.

Zad. 10 Znaleźć funkcję f wyrażającą liczbę pierwiastków równania w zależności od parametru $m \in \mathbb{R}$

(a) $9x^2 - 1 = m$

(b) $|x^2 + 2x - 3| = m$

(c) $|3x^2 - 4| + x = m$

Zad. 11 Suma kwadratów czterech kolejnych liczb naturalnych wynosi 534. Jakie to liczby?

Zad. 12 Koparka A może wykonać pewną pracę w czasie o 6 dni krótszym niż koparka B. Jeśli obie te koparki pracują jednocześnie, to mogą wykonać tę samą pracę w ciągu 4 dni. Po dwóch dniach wspólnej pracy koparka A została wycofana. Przez ile dni po wycofaniu koparki A musi pracować koparka B, aby dokończyć pracę?

Zad. 13 Rowerzysta przebył drogę $AB = 60 \text{ km}$ jadąc ze stałą prędkością. W drodze powrotnej po godzinie jazdy z taką samą prędkością zatrzymał się na 20 minut, a pozostałą część drogi odbył z prędkością zwiększoną o $4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Okazało się, że droga w obie strony trwała tyle samo czasu. Z jaką prędkością rowerzysta jechał z A do B ?

Zad. 14 Napisz równanie prostej k

(a) równoległej

(b) prostopadłej

do prostej o równaniu $2x + 3y = 5$, wiedząc że do prostej k należy punkt

(a) $A(0, 0)$

(b) $B(2, 1)$

(c) $C(1, 2)$

(d) $D(-1, 1)$.

Zad. 15 Sprawdź wzajemne położenie prostych

(a)
$$\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = -2x - 5 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ y = -2x - 8 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} 3x + y - 2 = 0 \\ -2x - 6y + 12 = 0 \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 6x + 4y - 1 = 0 \end{cases}$$

Zad. 16 Przedstaw ilustrację graficzną zbioru rozwiązań układu:

(a)
$$\begin{cases} y - 2x + 1 = 0 \\ y - |x| - 1 = 0 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} 2x - 3y - 6 < 0 \\ 2x - y < 2 \\ -x + 1 = y \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} x - y \leq 1 \\ x + y \leq 2 \\ y \leq 2 \end{cases}$$

Zad. 17 Oblicz odległość punktu $P(-2, 3)$ od prostej k , jeśli

(a) $k : x - 2 = 0$

(b) $k : 3x + 4y + 5 = 0$

(c) $k: x + y - 2 = 0$

(d) $k: y + 3 = 0$

Zad. 18 Oblicz odległość między prostymi równoległymi k i l , jeśli

(a) $k: x + y + 2 = 0 \quad l: x + y - 6 = 0$

(b) $k: 2x - y - 2 = 0 \quad l: -3x + 1,5y - 2 = 0$

(c) $k: y = \frac{1}{3}x + 2 \quad y = \frac{1}{3}x - 1$

Zad. 19 Mając wzór funkcji $f(x)$ wyznacz:

(a) $f(-x)$

(b) $f(|x|)$

(c) $f(x) + 2$

(d) $f(x - 3)$

(e) $f(-x + 4)$

(f) $f(x) - 4$

(g) $f(4x - 3) + 2$

(h) $f(-2x + 1) - 1$,

gdy

(a) $f(x) = 2x$

(b) $f(x) = -3x + 1$

(c) $f(x) = 4x - 5$

Zrób odpowiednie wykresy.

Zad. 20 Dane są funkcje $f(x) = 2x - 1$ $g(x) = -x + 2$. Oblicz

$$f(g(x)) + g(f(x)) > 0.$$