

# Matematyka - zajęcia wyrównawcze

## Zajęcia nr 4 – Funkcja liniowa, kwadratowa, układy równań i nierówności

dr Krzysztof Molenda

15 października 2012

### 1 Cele i zakres zajęć

Efekty kształcenia : student stosuje logiczny zapis przebiegu rozumowania, potrafi planować rozwiązanie; zauważa prawidłowości, uogólnia je i uzasadnia, posługuje się poprawną notacją matematyczną, sprawnie wykonuje działania matematyczne

Zakres tematyczny : wyrażenia algebraiczne z użyciem silni i dwumianu Newtona, układy równań i nierówności liniowych, funkcja kwadratowa, równania i układy równań algebraicznych

### 2 Ćwiczenia

#### 2.1 Silnia, dwumian Newtona

Na wniosek prowadzącej wykłady do przedmiotu *Matematyka i statystyka opisowa* w związku z realizacją bieżącego materiału, zestaw zadań związanych z pojęciem silni i dwumianu Newtona

**Zad. 1** Oblicz:

(a)  $\frac{5! \cdot 6!}{7!}$

(b)  $\frac{8!}{5!}3!$

(c)  $\frac{n!(n+1)!}{(n-1)!(n+2)!}$

(d)  $\frac{(n-1)!(n+1)!}{(n!)^2}$

(e)  $\binom{8}{3}$

(f)  $\binom{121}{120}$

(g)  $\binom{n+3}{n}$

(h)  $\binom{n+2}{n-2}$

**Zad. 2** Utwórz trójkąt Pascala z elementami  $\binom{n}{k}$  dla  $0 \leq n \leq 8$ . Napisz rozwinięcie potęgi

(a)  $(\sqrt{x} - 1)^6$

(b)  $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^5$

**Zad. 3** Uzasadnij równości:

(a)  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(b)  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

**Zad. 4** Rozwiąż równania w liczbach naturalnych:

(a)  $\binom{n}{1} \cdot \binom{n}{2} = \binom{n}{3}$

(b)  $\binom{n}{1} \cdot \binom{n}{3} = \binom{n}{2}$

(c)  $\binom{n}{2} \cdot \binom{2}{n} = n^2$

(d)  $\binom{n}{2} + \binom{7}{n} = 6n + 1$

(e)  $\binom{n}{3} + \binom{n}{2} = n$

(f)  $\binom{n}{n-1} + \binom{n}{1} = 3 \cdot \binom{n+1}{n} + 1$

## 2.2 Układy równań i nierówności liniowych

**Zad. 5** Rozwiąż graficznie i algebraicznie układy równań:

(a) 
$$\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

(b) 
$$\begin{cases} 6x - 4y = 16 \\ 5x + 7y = 3 \end{cases}$$

(c) 
$$\begin{cases} 2x - 3|y| = 13 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

(d) 
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + z = 4 \\ y + z = 6 \end{cases}$$

**Zad. 6** W wykropkowane miejsca wpisz tak dobrane równanie pierwszego stopnia o dwóch niewiadomych, aby otrzymany układ dwóch równań a) miał dokładnie jedno rozwiązanie, b) miał nieskończenie wiele rozwiązań, c) nie miał rozwiązania:

(a)  $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ \dots\dots\dots \end{cases}$

(b)  $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ \dots\dots\dots \end{cases}$

(c)  $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ \dots\dots\dots \end{cases}$

**Zad. 7** Rozwiąż graficznie i algebraicznie układy nierówności

(a)  $\begin{cases} 2x + 2y \leq 1 \\ 2x - 4y \leq -4 \end{cases}$

(b)  $\begin{cases} |x - 2| < 1 \\ 1 + y > 0 \end{cases}$

(c)  $\begin{cases} |y - x| \leq 1 \\ |x + 3| \leq 3 \end{cases}$

## 2.3 Funkcja kwadratowa

**Zad. 8** Sprowadź do postaci kanonicznej trójmian

(a)  $y = x^2 + 5x + 4$

(b)  $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$

(c)  $y = 2x^2 + 6x$

(d)  $y = -8x^2 + 16x$

(e)  $y = -4x^2 + 16x + 20$

**Zad. 9** Znajdź trójmian kwadratowy  $y = ax^2 + bx + c$ , który dla  $x = 5$  ma wartość 5, zaś dla  $x = 3$  ma minimum równe 1.

**Zad. 10** Ułożyć równanie kwadratowe, którego suma pierwiastków równa jest 5, a iloczyn równy jest 4.

**Zad. 11** Rozwiąż równania:

(a)  $\frac{1}{2x - 1} + \frac{2}{2x + 1} = 1$

(b) 
$$\frac{2}{x^2 - 1} + \frac{3}{x - 1} = \frac{3}{x + 1} + 1$$

(c) 
$$\frac{x}{x + a} + \frac{x}{x - a} = \frac{8}{3}$$

(d) 
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{x - a - b}$$

(e) 
$$4x^4 - 25x^2 + 6 = 0$$

(f) 
$$x^4 + 5x^2 + 4 = 0$$

(g) 
$$-x^4 + 35x^2 + 36 = 0$$

**Zad. 12** Dla jakich wartości  $x$  spełniona jest nierówność:

$$\frac{14}{x^2 - 5x + 6} < \frac{10}{2 - x} - 3$$

## 2.4 Układy równań i nierówności algebraicznych

**Zad. 13** Dla jakich wartości  $a$  układ nierówności:

$$-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$$

jest spełniony dla wszelkich wartości  $x$ .

**Zad. 14** Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań

a) 
$$\begin{cases} y - 2x - 1 = 0 \\ xy - 2 = 0 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} |y| = -x^2 + 4 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

**Zad. 15** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m \in \mathbb{R}$ , dla których układ

$$\begin{cases} y = mx^2 + 4 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

ma jedno rozwiązanie.

**Zad. 16** Dany jest układ równań

$$\begin{cases} mx^2 + my^2 - 6x + ky + 5 = 0 \\ x^2 - 4x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

o niewiadomych  $x$  i  $y$ .

a) Rozwiąż ten układ równań dla  $m = 0$  i  $k = 1$ .

b) Wykonaj ilustrację graficzną tego układu dla  $m = 1$  i  $k = -2$

c) Wyznacz układ równań drugiego stopnia, który ma następujący zbiór rozwiązań

$$\{(0, 1), (1, -2), (3, 2)\}$$

### 3 Zadania uzupełniające

**Zad. 17** Rozwiąż równania w liczbach naturalnych:

(a)  $\binom{3n}{2n} = 5n$

(b)  $\binom{n^2}{n} = 3n$

(c)  $(n+1)^2 - \binom{2n}{n} = (n-1)^2$

**Zad. 18** Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1 \\ |x-1| - y = -5 \end{cases}$$

**Zad. 19** Dany jest układ równań:

$$\begin{cases} (m-3)x - 4y = n \\ -9x + (m+2)y = 9 \end{cases}$$

o niewiadomych  $x$  i  $y$  oraz parametrach  $m$  i  $n$ . Dla jakich wartości parametrów równania tego układu są a) niezależne, b) zależne, c) sprzeczne?

**Zad. 20** Dla jakich wartości parametru  $p \in \mathbb{R}$  funkcja

$$f(x) = \frac{x^2 + px + 1}{x^2 - px + 4}$$

jest określona dla każdego  $x \in \mathbb{R}$  i ma dwa różne miejsca zerowe?

**Zad. 21** Dla jakich wartości parametru  $\alpha$  punkt przecięcia się prostych o równaniach

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = 1$$

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = 0$$

należy do paraboli o równaniu  $y = 1 - x^2$ ?