

Matematyka - zajęcia wyrównawcze

Zajęcia nr 1 – Elementy logiki i teorii mnogości

dr Krzysztof Molenda

3 października 2012

1 Cele i zakres zajęć

Efekty kształcenia : student umie jasno i precyzyjnie stawiać problem, stosuje logiczny zapis przebiegu rozumowania, zauważa prawidłowości, uogólnia je i uzasadnia, posługuje się poprawną notacją matematyczną

Zakres tematyczny : zdania logiczne (proste i złożone), forma zdaniowa oraz prawa logiczne dotyczące alternatywy, koniunkcji, implikacji, równoważności i negacji, kwantyfikatory, tautologie i metody ich udowadniania, zbiory, działania na zbiorach, rachunek zbiorów, proste równania i nierówności, moduł liczby, graficzne prezentacje zbiorów liczbowych na osi i na płaszczyźnie

Uwagi : treści z zakresu logiki i teorii mnogości zostały usunięte z Podstawy Programowej dla przedmiotu Matematyka, w zakresie podstawowym i rozszerzonym, począwszy od roku 2008.

2 Ćwiczenia

Zad. 1 Określ wartość logiczną poniższych zapisów:

- (a) Kwadrat liczby rzeczywistej x jest równy 1.
- (b) Pewna liczba naturalna jest większa od 10.
- (c) Czy istnieje liczba naturalna mniejsza od 0?
- (d) Przez dany punkt można poprowadzić co najwyżej jedną prostą rozłączną z daną prostą.
- (e) $2 + 2 = 4$
- (f) W trójkącie prostokątnym kwadrat jednego boku jest równy sumie kwadratów boków pozostałych.
- (g) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 2 = 0$
- (h) $\exists x \in \mathbb{N} \quad (-2x - 1) \geq 6$

(i) $\exists n \in \mathbb{N} \quad 3^n = 8$

(j) $(\exists x \in \mathbb{R} \quad \sqrt{x^2} = x) \implies (\forall x \in \mathbb{R} \quad \sqrt[4]{x^4} = x)$

(k) $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x \cdot y = 1$

(l) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x \cdot y = 1$

Zad. 2 Utwórz zaprzeczenie zdań z zadania poprzedniego**Zad. 3** Podaj taką wartość zmiennej x , aby forma zdaniowa

$$x^2 - 2 \geq 0 \implies x < 0$$

była zdaniem: a) prawdziwym; b) fałszywym.

Zad. 4 Sprawdź, czy podane zdania są tautologiami:

(a) $(p \implies q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee q$

(b) $(p \vee q) \wedge (\neg p) \implies q$

(c) $\neg(p \implies q) \Leftrightarrow p \wedge (\neg q)$

(d) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$

(e) $(p \implies q) \Leftrightarrow (\neg q \implies \neg p)$

Zad. 5 Dane są zbiory

$$A = \{0, -1, \frac{1}{2}, 3, 5\}$$

$$B = \{-1, \frac{1}{2}, 2, 4, 8, 3\}$$

$$C = \{2, 3, 1, 0\}.$$

Wyznacz: $A \cup B$; $A \cap B \cap C$; $A \cup C$; $A \cap C$; $A \setminus C$; $C \setminus B$.**Zad. 6** Wyznacz zbiory $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$; A' ; B' ; $A' \setminus B$; $A \cap B'$, jeśli

(a) $A = (-\infty; 2) \cup (3; 5)$; $B = \langle 0; 5 \rangle \cup (7; +\infty)$

(b) $A = \langle 1; 3 \rangle \cup \langle 4; +\infty \rangle$; $B = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$

Zad. 7 Dane są zbiory

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x| + |x - 1| > 5\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 7x \leq 0\}$$

Wyznacz: $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$.**Zad. 8** Dane są zbiory

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| > 0\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \leq 0\}$$

Wyznacz: $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$.

Zad. 9 Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C prawdziwe są podane poniżej równości, lub wskaż kontrprzykład przeczący im.

- (a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- (b) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
- (c) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
- (d) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
- (e) $A \cap (B \setminus C) = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
- (f) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

Zad. 10 Dane są zbiory: $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{2, 3, 4\}$; $C = \{5, 6\}$.
Sprawdź, czy dla tych zbiorów prawdziwe są równości:

- (a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- (b) $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$
- (c) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- (d) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

3 Zadania uzupełniające

Zad. 11 Przyjmując oznaczenia:

A – zbiór studentów

B – zbiór ludzi pracujących

C – zbiór słuchaczy studiów dziennych

D – zbiór słuchaczy studiów wieczorowych

E – zbiór osób studiujących zaocznie

F – zbiór osób uprawiających sport

zapisz w języku teorii zbiorów podane poniżej zdania:

- (a) Niektórzy studenci pracują zawodowo.
- (b) Żaden człowiek pracujący zawodowo nie jest słuchaczem studiów dziennych.
- (c) Każdy student jest słuchaczem studiów dziennych lub wieczorowych albo osobą studiującą zaocznie.
- (d) Każdy, kto jest słuchaczem studiów wieczorowych lub studiuje zaocznie, jest człowiekiem pracującym zawodowo.
- (e) Niektóre osoby uprawiające sport nie są ani studentami ani ludźmi pracującymi zawodowo.
- (f) Nikt, kto studiuje i pracuje zawodowo nie uprawia sportu.

(g) Ci studenci, którzy studiują wieczorowo lub zaocznie, nie uprawiają sportu.

Zad. 12 Pewna rodzina składa się z matki, ojca i 3 dzieci: Aliny, Doroty i Jacka. Ustal, kto w tej rodzinie ogląda program TV, na podstawie następujących danych:

1. Jeżeli ojciec ogląda program, to ogląda go i matka
2. Program TV ogląda stale Dorota lub Alina
3. Program TV ogląda stale matka lub Jacek, ale nie oboje
4. Jeżeli program ogląda Alina, to ogląda go ojciec i Dorota
5. Dorota i Jacek zawsze równocześnie oglądają program TV

Zad. 13 Zadanie Lwa Tołstoja o kosiarzach

Pewnemu zespołowi kosiarzy polecono skosić dwie łąki; powierzchnia jednej z tych łąk była dwa razy większa od drugiej. Pół dnia cały zespół kosiarzy kosił większą łąkę; w drugiej połowie tego samego dnia zespół podzielił się na dwie równe grupy. Pierwsza grupa w dalszym ciągu kosiła większą łąkę i do końca dnia skosiła ją całkowicie. Druga grupa poszła kosić mniejszą łąkę, która kosiła do końca dnia, ale nie skosiła jej całkowicie. Reszta małej łąki została skoszona nazajutrz przez jednego kosiarza, któremu zajęło to cały dzień.

Ilu kosiarzy liczył zespół?

Zad. 14 Zadanie Einsteina na inteligencję

Legenda głosi, że zadanie to zostało wymyślone przez Einsteina. Według niego, 98% populacji ludzkiej nie jest w stanie go rozwiązać. Jeśli to zadanie rozwiążesz jesteś wybitnym człowiekiem.

5 ludzi zamieszkuje 5 domów w 5 różnych kolorach. Wszyscy palą papierosy 5 różnych marek i piją 5 różnych napojów. Hodują zwierzęta 5 różnych gatunków.

Pytanie: Kto hoduje rybki?

Dane:

- Norweg zamieszkuje pierwszy dom.
- Anglik mieszka w czerwonym domu.
- Zielony dom znajduje się po lewej stronie domu białego.
- Duńczyk pija herbatkę.
- Palacz Rothmansów mieszka obok hodowcy kotów.
- Mieszkaniec żółtego domu pali Dunhille.
- Niemiec pali Marlboro.
- Mieszkaniec środkowego domu pija mleko.
- Palacz Rothmansów ma sąsiada, który pija wodę.



- Palacz Pall Malli hoduje ptaki.
- Szwed hoduje psy.
- Norweg mieszka obok niebieskiego domu.
- Hodowca koni mieszka obok żółtego domu.
- Palacz Philip Morris pija piwo.
- W zielonym domu pija się kawę.

Tylko jedna odpowiedź jest możliwa. Rozwiązanie nie zajmuje więcej niż 2 min (według Einsteina).

Zad. 15 W pewnej grupie studentów:

- 60% zna angielski,
- 30% zna rosyjski,
- 20% zna niemiecki,
- 15% zna angielski i rosyjski,
- 5% zna angielski i niemiecki,
- 2% zna rosyjski i niemiecki,
- 1% zna wszystkie trzy języki: angielski, rosyjski i niemiecki.

Jaki procent studentów nie zna żadnego z tych trzech języków?

