

Matematyka – zajęcia wyrównawcze Zajęcia nr 1 – Elementy logiki i teorii mnogości

Podczas zajęć omawiane będą elementy logiki takie jak proste i złożone zdania logiczne, formy zdaniowe, prawa logiczne (alternatywa, koniunkcja, implikacja, równoważność, negacja) kwantyfikatory tautologie i sposoby ich udowadniania, zbiory, działania na zbiorach, rachunek zbiorów, proste równania i nierówności, graficzna prezentacja zbiorów.

Zadanie 1. Określ wartość logiczną poniższych zapisów

- a) Każda liczba naturalna jest nieujemna
- b) Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest dodatni
- c) Istnieje liczba całkowita, której trzecia potęga jest dwucyfrową liczbą ujemną
- d) $\exists x \in \mathbb{N} \sqrt{x} = 5 \wedge x^2 = 25$
- e) $\forall x \in \mathbb{R} x^2 - 4 = 0$
- f) $(\exists x \in \mathbb{R} \sqrt{x^2} = x) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R} \sqrt[4]{x^4} = x)$

Zadanie 2. Utwórz zaprzeczenia zdań z zadania poprzedniego

Zadanie 3. Podaj taką wartość zmiennej x , aby forma zdaniowa
$$x^2 - 2 \geq 0 \Rightarrow x < 0$$

była zdaniem

- a) prawdziwym
- b) fałszywym

Zadanie 4. Sprawdź, czy poniższe zdania są tautologiami:

- a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$
- b) $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$
- c) $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$
- d) $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow s) \wedge (\sim p \vee \sim s) \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)$

Zadanie 5. Wyznacz sumę, różnicę oraz iloczyn zbiorów, jeżeli:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

Zadanie 6. Wyznacz sumę, różnicę oraz iloczyn zbiorów, jeżeli:

a)

$$A = (-\infty; 2) \cup (5; \infty)$$

$$B = (-\infty; -2) \cup (2; 5)$$

b)

$$A = (-3; 2) \cup (3; \infty)$$

$$B = (-\infty; 2) \cup (2; \infty) \setminus \{3\}$$

Zadanie 7. Dane są zbiory

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x| + |x - 1| > 5\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 7 \leq 0\}$$

Wyznacz $A \cup B$, $A \cap B$, A' , B'



Zadanie 8. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C prawdziwe są podane poniżej równości lub wskaż kontrprzykład przeczący im:

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus B) \cap (B \setminus C)$

c) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$

Zadanie 9. Dane są zbiory:

$$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{2, 3, 4\} \quad C = \{5, 6\}.$$

Sprawdź, czy dla tych zbiorów prawdziwe są równości

a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

b) $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$

c) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

d) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

Zadanie 10. Rozpisz z definicji

a) $x \in A \setminus (B \cup C) \Leftrightarrow \dots$

b) $x \in (A \cup B) \cap C \Leftrightarrow \dots$

c) $x \in A' \cap (B \setminus C) \Leftrightarrow \dots$

d) $x \in (A \cap B)' \setminus C \Leftrightarrow \dots$

